

Zadanie 1. Doprowadź poniższe macierze do postaci schodkowej i wyznacz ich rzędy:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} & \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zadanie 2. Wyznacz macierze odwrotne do zadanych macierzy:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, & \text{b)} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{c)} A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, & \text{d)} A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Zadanie 3. Oblicz $[r(A)]^2 + (\det B)^2$ wiedząc, że:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 1 & -8 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

oraz $\det(2B) = 32$, $\det(3B) = 162$.

Zadanie 4. Podaj możliwe wartości wyznacznika macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jeśli:

$$\text{a)} A^2 = A - I, \quad \text{b)} A^2 + A^{-1} = \bar{0}.$$

Zadanie 5. Oblicz wartość $\det(\frac{1}{2}B \cdot B^T \cdot B^{-1})$, gdzie:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Znajdź wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie $a_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$.